نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **ترکیب توابع**

سوال ۱

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

ابتدا تابع $f(g(x)) = ۹x^۲ - ۳x - ۴$ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(g(x)) = ۹x^۲ - ۳x - ۴$$

$$= (۳x - ۲)^۲ + ۹x - ۸ = (۳x - ۲)^۲ + ۳(۳x - ۲) - ۲$$

حال ضابطه تابع $g(x) = ۳x - ۲$ را درون رابطهٔ فوق قرار داده و سپس به کمک آن $f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(۳x - ۲) = (۳x - ۲)^۲ + ۳(۳x - ۲) - ۲$$

$$\xrightarrow{۳x-۲=t} f(t) = t^۲ + ۳t - ۲$$

بنابراین ضابطهٔ تابع $f - g$ برابر است با:

$$f(x) - g(x) = x^۲ + ۳x - ۲ - (۳x - ۲) = x^۲$$

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۴

$f(g(x))$ یعنی در تابع f به جای x، عبارت $g(x)$ را قرار دهیم. چون $f(x) = x + ۱$ است، پس داریم: $f(g(x)) = g(x) + ۱$

$$\underbrace{(fog)(x)}_{f(g(x))} = \frac{x}{x^۲+۱} \Rightarrow g(x) + ۱ = \frac{x}{x^۲+۱}$$

$$g(x) = \frac{x}{x^۲+۱} - ۱ \Rightarrow g(x) = \frac{x-x^۲-۱}{x^۲+۱}$$

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۱

$$g(x) = ۲x - ۱ = t \Rightarrow x = \frac{t+۱}{۲}$$

$$f(t) = ۸(\frac{t+۱}{۲})^۲ - ۶(\frac{t+۱}{۲}) + ۶$$

$$\Rightarrow f(t) = ۲t^۲ + ۴t + ۲ - ۳t - ۳ + ۶ \Rightarrow f(t) = ۲t^۲ + t + ۵$$

$$\Rightarrow (f - g)(۳) = f(۳) - g(۳) = (۱۸ + ۳ + ۵) - (۶ - ۱) = ۲۱$$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۲

$$f(g(x)) = \frac{۲x+۱}{x-۱} \Rightarrow f\left(\frac{x-۱}{x}\right) = \frac{۲x+۱}{x-۱}$$

$$\frac{x-۱}{x} = t \Rightarrow tx - x + ۱ = ۰ \Rightarrow x(t-۱) = -۱ \Rightarrow x = \frac{-۱}{t-۱}$$

$$f(t) = \frac{۲\left(\frac{-۱}{t-۱}\right)+۱}{\frac{-۱}{t-۱}-۱} = \frac{-۲+t-۱}{-۱-t+۱} = \frac{t-۳}{-t} \Rightarrow f(x) = \frac{-x+۳}{x}$$

$$\Rightarrow (f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{-x+۳}{x} + \frac{x-۱}{x} = \frac{۲}{x}$$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۳

برای تشکیل تابع $(fog)(x)$ باید به جای x در تابع $f(x)$، تابع $g(x)$ را قرار دهیم. بنابراین ضابطه تابع $f(x)$ به صورت $۳x + ۵$ می‌باشد.

$$(fog)(x) = f(g(x)) = ۳g(x) + ۵ \Rightarrow f(x) = ۳x + ۵$$

$$(gof)(x) = g(f(x)) = ۹x^۲ + ۳۰x + ۲۶$$

$$\Rightarrow g(۳x + ۵) = ۹x^۲ + ۳۰x + ۲۶ = (۳x + ۵)^۲ + ۱$$

$$\xrightarrow{t=۳x+۵} g(t) = t^۲ + ۱$$

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۴

$$g(f(x)) = ۹x^۲ - ۹x + ۲ \Rightarrow g(۳x - ۲) = (۳x - ۱)(۳x - ۲)$$

$$= (۳x - ۲ + ۱)(۳x - ۲) \xrightarrow{۳x-۲=t} g(t) = t(t + ۱) = t^۲ + t$$

در نتیجه $g(x) = x^۲ + x$ است.

حال ضابطه $(g - f)(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$(g - f)(x) = g(x) - f(x) = x^۲ + x - (۳x - ۲) = x^۲ - ۲x + ۲$$

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{cases}(f+g)(x)=f(x)+g(x)=۴x^۲+۱\\(f-g)(x)=f(x)-g(x)=۲x+۱\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲f(x)=۴x^۲+۲x+۲\Rightarrow f(x)=۲x^۲+x+۱$$

$$f(x)+g(x)=۴x^۲+۱\xrightarrow{f(x)=۲x^۲+x+۱}g(x)=۲x^{۲-x}$$

$$\Rightarrow g(۲)=۲\times ۲^۲-۲=۶$$

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۳

$$g(f(x))=۱+\frac{۱}{x^۲}$$

$$g(۱+x^۲)=۱+\frac{۱}{x^۲}$$

$$x=\sqrt{۲}\Rightarrow g(۳)=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۱

گزینه‌ی «۱»

با توجه به اینکه $g(f(x))=x$ نتیجه می‌گیریم $g(x)$ و $f(x)$ معکوس یکدیگرند. پس معکوس $f(x)$ که همان $g(x)$ می‌باشد را محاسبه می‌کنیم.

$$y=\frac{۲x}{x+۲}\Rightarrow yx+۲y=۲x\Rightarrow ۲y=۲x-yx$$

$$۲y=x(۲-y)\Rightarrow x=\frac{۲y}{۲-y}\Rightarrow f^{-۱}(x)=g(x)=\frac{۲x}{۲-x}$$

$$g(\frac{۱}{x})=\frac{۲(\frac{۱}{x})}{۲-\frac{۱}{x}}=\frac{\frac{۲}{x}}{\frac{۲x-۱}{x}}=\frac{۲}{۲x-۱}$$

$$h(x)=\frac{g(x)}{xg(\frac{۱}{x})}=\frac{\frac{۲x}{۲-x}}{x(\frac{۲}{۲x-۱})}=\frac{\frac{۲x}{۲-x}}{\frac{۲x}{(۲x-۱)}}=\frac{۲x-۱}{۲-x}$$

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۱

$$fog(x)=f(g(x))=(g(x))^۲+۴g(x)+۵ \qquad (۱)$$

$$fog(x)=x^۲-۸x+۱۷=(x-۴)^۲+۱ \qquad (۲)$$

$$(۱)=(۲)\Rightarrow (g(x)+۲)^۲+۱=(x-۴)^۲+۱$$

$$\xrightarrow{x=۷}(g(۷)+۲)^۲=۹\Rightarrow g(۷)=-۲\pm ۳\Rightarrow g(۷)=۱,-۵$$